

ENSINO MÉDIO

PROBLEMA COM A MATEMÁTICA? SOLUÇÃO...



Capítulo 11: Números Complexos

Introdução

A notação algébrica x^n , onde o inteiro n é uma potência, significa que n cópias da letra x são multiplicadas entre si.

Portanto, quando $x^2 = x \cdot x$, diz-se que x está elevado ao quadrado; enquanto para $x^3 = x \cdot x \cdot x$, diz-se que x está elevado ao cubo.

O inverso da função de n -ésima potência é a raiz n -ésima, escrita como $x^{1/n}$.

Sendo assim, $x^{1/2} = \sqrt{x}$ é a função raiz quadrada, enquanto $x^{1/3}$ é a raiz cúbica.

Infelizmente, quando n é um inteiro par, a função x^n não é um mapeamento um-para-um, mas sim muitos-para-um. Tem-se, por exemplo, que tanto $x = -2$ ao quadrado quanto $x = 2$ ao quadrado são iguais a 4. Portanto, a função inversa não é bem definida. Por convenção, $\sqrt{x}$ significa a raiz quadrada positiva.

Mesmo quando x é real, $x^{1/n}$ admite n valores, alguns dos quais podem ser números complexos. Se $n = 3$, existe uma raiz cúbica real, mas duas raízes cúbicas complexas. Lamentavelmente, a raiz cúbica principal, definida de forma análoga à raiz positiva de $\sqrt{x}$, é um número complexo quando x é negativo.

Portanto, mesmo para n inteiro, o cálculo das raízes n -ésimas de um número real x requer o cuidado devotado neste capítulo para tal.

Além disso, o cálculo de $x^{n/m}$, onde n e m são números inteiros, requer uma atenção adicional. Interpretando-se a m -ésima raiz como sendo a raiz principal significa que a raiz deve ser calculada antes da potência. O cálculo da potência seguido do cálculo da raiz não gera o mesmo valor que se obteria pelo uso das [leis de DeMoivre](#), cujas regras fornecem uma definição de $x^{n/m}$.

Como existem muitas complicações introduzidas pelos números complexos, este capítulo fornece uma introdução à aritmética de números complexos antes de ingressarmos no tópico sobre raízes e potências de quantidades reais e complexas.

▼ Índice de Termos

Os seguintes termos, neste capítulo, têm conexão com o Dicionário do Maple; para mais informações vá em [Dicionário Matemático](#).

valor absoluto	leis de DeMoivre	comprimento	teorema de Pitágoras
diagrama de	par	magnitude	quociente
Argand	expoente	muitos-para-um	número racional
argumento	exponenciar	módulo	eixo real
binomial	ponto flutuante	negativo	número real
plano Cartesiano	hipotenusa	um-para-um	pare real
complexo	imaginário	intervalo aberto	raiz
conjugado	eixo imaginário	positivo	raiz quadrada
número complexo	parte imaginária	potência	simetria
plano complexo	inteiro		
cubo			
raiz cúbica			

▼ Problemas Típicos

Nos problemas 11.1 - 11.8, implementar os cálculos indicados para os [números complexos](#) $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$.

11.1. Obter a soma $z + w$.

11.2. Obter a diferença $z - w$.

11.3. Obter o produto zw .

11.4. Obter o [quociente](#) $\frac{z}{w}$.

11.5. Descrever z e w em sua forma polar.

11.6. Usar a [lei de DeMoivre](#) para calcular z^5 e w^7 .

11.7. Calcular $\sqrt{z}$ e $\sqrt{w}$.

11.8. Calcular $z^{1/3}$ e $w^{1/3}$.

11.9. Se a é um [número racional](#) (a razão de dois [inteiros](#)), a [exponenciação](#) é definida por

$$z^a = |z|^a \operatorname{cis}(a \theta) = |z|^a (\cos(a \theta) + i \sin(a \theta))$$

onde θ é o [argumento](#) de z . Se $z = -2 + 3i$ e $a = \frac{2}{3}$, calcular z^a por esta definição. (Isto foi implementado no **Tutorial Aritmética Complexa**, na seção *Exponenciação de números complexos*, onde encontra-se o símbolo $Z^{n/m}$.)

Em seguida, calcular $[z^2]^{1/3}$ e $[z^{1/3}]^2$, cuja [raiz cúbica](#) principal deve ser tomada em cada caso, e determinar qual destas duas formas encontra-se em acordo com a definição de z^a . (Novamente, estes cálculos foram implementados no **Tutorial Aritmética Complexa**, na seção *Exponenciação de números complexos*, onde encontram-se os símbolos $[Z^n]^{1/m}$ e $[Z^{1/m}]^n$, respectivamente.)

11.10. Repetir o problema 9 para $z = -2 - 3i$ e $a = \frac{3}{2}$. Calcular, então, z^a de acordo com a definição e calcular, ainda, $[z^3]^{1/2}$ e $[z^{1/2}]^3$, cuja [raiz quadrada](#) principal deve ser tomada em cada caso. Determinar qual destas duas formas encontra-se em acordo com a definição de z^a .

11.11. Traçar o gráfico das funções a seguir.

(a) $f(x) = (x^2 + 1)^{2/3}$

(b) $g(x) = (x^2 - 1)^{3/2}$

Em particular, qual o valor de $g(0)$?

11.12. Qual dos dois cálculos a seguir está correto?

(a) $(-1) = (-1)^{\frac{2}{2}} = [(-1)^{1/2}]^2 = i^2 = -1$

(b) $(-1) = (-1)^{\frac{2}{2}} = [(-1)^2]^{1/2} = \sqrt{1} = 1$

Antes de acessar a versão do Maple para as soluções do problemas típicos apresentados acima, inicialize o Maple apertando o botão à direita.

No Maple, o símbolo padrão para $\sqrt{-1}$, a unidade imaginária é a letra I. De acordo com a notação mais utilizada, a inicialização ajusta a unidade imaginária para a letra "i" nesse desse capítulo.

Nossa inicialização também define a função $\text{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Inic...

Soluções

Problema 11.1

11.1 - Solução Matemática

A soma dos números complexos $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$ é obtida na tabela à direita.

A parte real da soma é a soma das partes reais de z e w .

A parte imaginária da soma é a soma das partes imaginárias de z e w .

$$\begin{array}{r} 2 + 3i \\ 5 - 2i \end{array}$$

$$7 + i$$

11.1 - Solução via Maplet

A soma dos números complexos

$$z = 2 + 3i$$

e

$$w = 5 - 2i$$

pode ser encontrada pelo [Tutorial Aritmética Complexa](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.1.1.

Os números complexos z e w são inseridos, introduzindo-se separadamente suas partes real e imaginária.

(A parte imaginária de $a + bi$ é o número real b .)

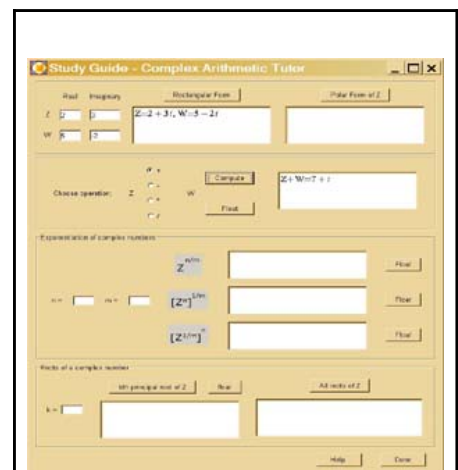


Figura 11.1.1 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

▼ 11.1 - Solução Interativa

• Digite $z = 2 + 3i$ • Menu de Contexto: Associe Nome	
• Digite $w = 5 - 2i$ • Menu de Contexto: Associe Nome	
• Digite $z + w$ • Menu de Contexto: Avalie e Exiba na Linha	

▼ 11.1 - Solução via Comandos do Maple

Insira os números complexos $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$	> $z := 2 + 3i;$ $w := 5 - 2i$
Obtenha a soma $z + w$	> $z + w$

Diz-se que números complexos da forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais, encontram-se na forma *retangular*.

A parte real de z é o número real a , enquanto a parte imaginária de z é o número real b .

A parte real da soma de dois números complexos na forma retangular é obtida adicionando-se as partes reais; a parte imaginária é obtida adicionando-se as partes imaginárias.

Portanto, a soma de $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$, obtida na Tabela 11.1.1. A soma de $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$ é dada na Tabela 11.1.2.

$\begin{array}{r} a + bi \\ c + di \\ \hline (a + c) + (b + d)i \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 + 3i \\ 5 - 2i \\ \hline 7 + i \end{array}$
Tabela 11.1.1 Soma de z_1 e z_2	Tabela 11.1.2 Soma de z e w

▼ Problema 11.2

▼ 11.2 - Solução Matemática

A diferença entre os números complexos $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$ é obtida usando-se o diagrama abaixo.

A parte real da diferença é a diferença das partes reais de z e w .

A parte imaginária da diferença é a diferença das partes imaginárias de z e w .

$\begin{array}{r} 2 + 3i \\ 5 - 2i \\ \hline -3 + 5i \end{array}$

11.2 - Solução via Maplet

A diferença dos números complexos

$$z = 2 + 3i$$

e

$$w = 5 - 2i$$

pode ser encontrada pelo [Tutorial Aritmética Complexa](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.2.1.

Os números complexos z e w são inseridos, introduzindo-se separadamente suas partes real e imaginária.

(A parte imaginária de $a + bi$ é o número real b .)

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

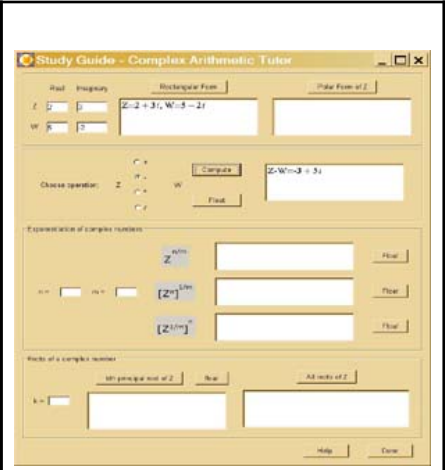


Figura 11.2.1 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

11.2 - Solução Interativa

Re-inicialize o Maple apertando o botão à direita. I...	
• Digite $z = 2 + 3i$ • Menu de Contexto: Associe Nome	
• Digite $w = 5 - 2i$ • Menu de Contexto: Associe Nome	
•	

- Digite $z - w$
- Menu de Contexto: Avalie e Exiba na Linha

▼ 11.2 - Solução via Comandos do Maple

Insira os números complexos $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$	> $z := 2 + 3i;$ $w := 5 - 2i$
Obtenha a diferença $z - w$	> $z - w$

Números complexos da forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais, encontram-se na forma *retangular*.

A parte real de z é o número real a , enquanto a parte imaginária é o número real b .

A parte real da diferença entre dois números complexos na forma retangular é obtida subtraindo-se suas partes reais; enquanto a parte imaginária é obtida pela subtração das partes imaginárias.

Portanto, a diferença entre $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$, obtida na Tabela 11.2.1. A diferença de $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$ é dada na Tabela 11.2.2.

$\begin{array}{r} a + bi \\ c + di \\ \hline (a - c) + (b - d)i \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 + 3i \\ 5 - 2i \\ \hline -3 + 5i \end{array}$
Tabela 11.2.1 Diferença de z_1 e z_2	Tabela 11.2.2 Diferença de z e w

▼ Problema 11.3

▼ 11.3 - Solução Matemática

O produto de $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é $z_1 z_2 = (a - c) + (b - d)i$, obtido no diagrama a seguir, onde os números são multiplicados com se fossem dois binômios.

$$\begin{array}{r} a + bi \\ c + di \\ \hline (ac - bd) + (bc + ad)i \end{array}$$

O produto dos números complexos $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$ é obtido no diagrama a seguir:

$$\frac{2 + 3i}{5 - 2i}$$

$$[(2)(5) + (3)(-2)i^2] + i[(2)(-2) + (5)(3)]$$

Como $i^2 = -1$, por definição, este produto reduz-se a $[10 + 6] + i[15 - 4] = 16 - 11i$.

▼ 11.3 - Solução via Maplet

O produto dos números complexos

$$z = 2 + 3i$$

e

$$w = 5 - 2i$$

pode ser encontrado pelo [Tutorial Aritmética Complexa](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.3.1.

Os números complexos z e w são inseridos, introduzindo-se separadamente suas partes real e imaginária.

(A parte imaginária de $a + bi$ é o número real b .)

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

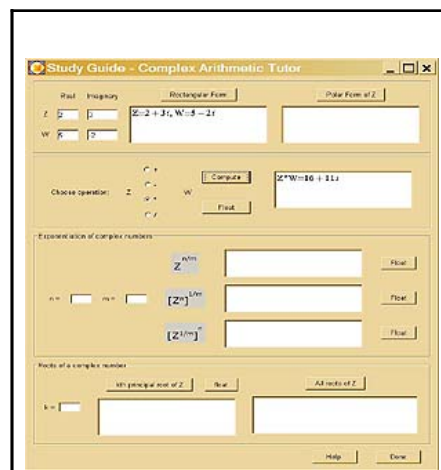


Figura 11.3.1 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

▼ 11.3 - Solução Interativa

Reinicialize o Maple apertando o botão à direita.	
• Digite $z = 2 + 3i$ • Menu de Contexto: Associe Nome	
• Digite $w = 5 - 2i$ • Menu de Contexto: Associe Nome	
• Usando um espaço para multiplicação, digite $z w$ • Menu de Contexto: Avalie e Exiba na Linha	

L

11.3 - Solução via Comandos do Maple

Insira os números complexos $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$	> $z := 2 + 3i;$ $w := 5 - 2i$
Usando um espaço para multiplicação, obtenha o produto $z w$	> $z w$

Números complexos da forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais, encontram-se na forma *retangular*.

A parte real de z é o número real a , enquanto a parte imaginária é o número real b .

O produto destes dois números complexos na forma retangular é obtido ao multiplicar-se os números complexos como dois binômios.

Portanto, o produto de $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é $z_1 z_2 = (a - c) + (b - d)i$, obtida na Tabela 11.3.1. O produto de $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$ é dado na Tabela 11.3.2.

$\frac{a + bi}{c + di}$ $(ac - bd) + (bc + ad)i$	$\frac{2 + 3i}{5 - 2i}$ $[(2) \cdot (5) + (3) \cdot (-2) \overline{i^2}] + i [(2) \cdot (-2) + (5) \cdot (3)]$
Tabela 11.3.1 Produto de z_1 e z_2	Tabela 11.3.2 Produto de z e w

Como $i^2 = -1$, por definição, este produto reduz-se a $[10 + 6] + i [15 - 4] = 16 - 11i$.

Problema 11.4

11.4 - Solução Matemática

O quociente de dois números complexos na forma retangular é obtido ao multiplicar-se o numerador e o denominador do quociente pelo complexo conjugado do denominador.

Sendo assim, o quociente de $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \frac{c - di}{c - di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

O quociente de z e w é, portanto,

$$\frac{2 + 3i}{5 - 2i} = \frac{2 + 3i}{5 - 2i} \frac{5 + 2i}{5 + 2i} = \frac{4 + 19i}{29} = \frac{4}{29} + \frac{19}{29}i$$

O produto do número complexo $z_2 = c + di$ por seu complexo conjugado $\overline{z}_2 = c - di$ é dado no diagrama

$$\frac{c + di}{c - di}$$

$$c^2 - d^2 i^2 + i(c d - c d)$$

Como $i^2 = -1$, por definição, este produto reduz-se a $c^2 + d^2$.

11.4 - Solução via Maplet

O quociente dos números complexos

$$z = 2 + 3i$$

e

$$w = 5 - 2i$$

pode ser encontrado pelo [Tutorial Aritmética Complexa](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.4.1.

Os números complexos z e w são inseridos, introduzindo-se separadamente suas partes real e imaginária.

(A parte imaginária de $a + bi$ é o número real b .)

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

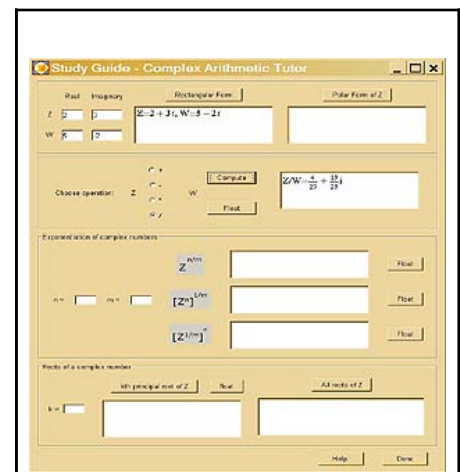


Figura 11.4.1 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

11.4 - Solução Interativa

Reinicialize o Maple apertando o botão à direita.

I...

- Digite $z = 2 + 3i$

• Menu de Contexto: Associe Nome	
• Digite $w = 5 - 2i$ • Menu de Contexto: Associe Nome	
• Usando a barra inclinada (/) para divisão, digite $\frac{z}{w}$ • Menu de : Menu de Contexto: Avalie e Exiba na Linha	

▼ 11.4 - Solução via Comandos do Maple

Insira os números complexos $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$	> $z := 2 + 3i;$ $w := 5 - 2i$
Obtenha o quociente $\frac{z}{w}$	> $\frac{z}{w}$

Números complexos da forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais, encontram-se na forma *retangular*.

A parte real de z é o número real a , enquanto a parte imaginária é o número real b .

O quociente de dois números complexos na forma retangular é obtido ao multiplicar-se o numerador e o denominador do quociente pelo complexo conjugado do denominador.

Desta maneira, o quociente de $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \frac{c - di}{c - di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

O quociente de z e w é, portanto,

$$\frac{2 + 3i}{5 - 2i} = \frac{2 + 3i}{5 - 2i} \frac{5 + 2i}{5 + 2i} = \frac{4 + 19i}{29} = \frac{4}{29} + \frac{19}{29}i$$

O produto do número complexo $z_2 = c + di$ por seu complexo conjugado $\overline{z_2} = c - di$ é dado no diagrama

$$\begin{array}{c} c + di \\ c - di \\ \hline c^2 - d^2 i^2 + i(cd - cd) \end{array}$$

Como $i^2 = -1$, por definição, este produto reduz-se a $c^2 + d^2$.

Problema 11.5

11.5 - Solução Matemática

A forma polar do número complexo $z = 2 + 3i$ é determinada pela magnitude

$$\rho = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

e pelo argumento

$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$$

A geometria deste cálculo pode ser melhor visualizada na figura 11.5.1, o diagrama de Argand para z , um gráfico de z como um ponto no plano complexo.

O eixo horizontal é chamado de eixo real, enquanto o eixo vertical é o eixo imaginário. O número complexo $z = 2 + 3i$ é traçado como o ponto $(2, 3)$ no plano Cartesiano real, mas sua interpretação é um ponto no plano complexo.

A definição do número $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ como *comprimento* ou *magnitude* do número complexo z segue do teorema de Pitágoras - pois é simplesmente o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo, formado pelas partes real e imaginária do número complexo. Na figura 1, a parte real corresponde ao segmento vermelho, a parte imaginária é a linha verde e a hipotenusa é a linha preta.

A forma polar do número complexo $w = 5 - 2i$ é determinada pela magnitude

$$\rho = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

e pelo argumento

$$\theta = -\arctan\left(\frac{2}{5}\right)$$

O intervalo de valores para o ângulo θ , medida do eixo real positivo, é $-\pi < \theta \leq \pi$.

O diagrama de Argand para $w = 5 - 2i$ é dado

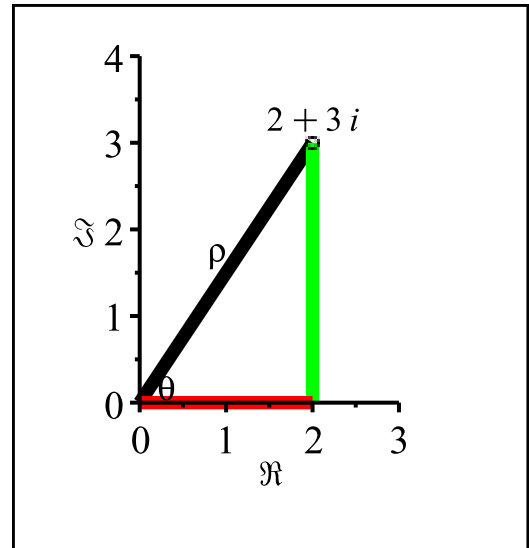


Figura 11.5.1 Diagrama de Argand para $z = 2 + 3i$

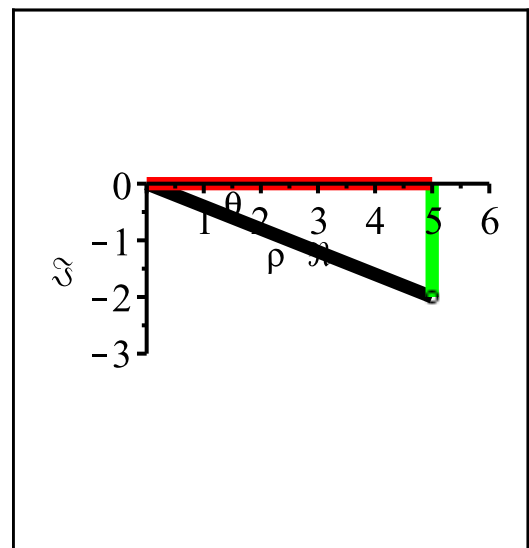


Figura 11.5.2 Diagrama de Argand

pela Figura 11.5.2.

$$\text{para } w = 5 - 2i$$

A forma retangular do número complexo cuja forma polar é dada por ρ e θ é

$$\rho (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Alguns textos utilizam a abreviação

$$\rho \operatorname{cis}(\theta)$$

onde as letras "cis" significam "cosseno + i seno".

A função "cis" não é nativa ao Maple. Entretanto, é fácil de ser definida, e o botão Inicializar na seção Inicialização implementa a definição $\operatorname{cis} := x \rightarrow \cos(x) + i \sin(x)$

11.5 - Solução via Maplet

A forma polar do número complexo

$$z = 2 + 3i$$

pode ser encontrada pelo [Tutorial Aritmética Complexa](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.5.3.

Os números complexos são inseridos introduzindo-se separadamente suas partes real e imaginária. (A parte imaginária de $a + bi$ é o número real b .)

O botão **Forma Polar** resulta $|z| = \rho = \sqrt{13}$, com argumento $\theta = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$.

A forma polar do número complexo

$$w = 5 - 2i$$

também pode ser encontrada com o [Tutorial Aritmética Complexa](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.5.4. Neste caso, este deve ser inserido como se fosse z .

Os números complexos são inseridos introduzindo-se separadamente suas partes real e imaginária. (A parte

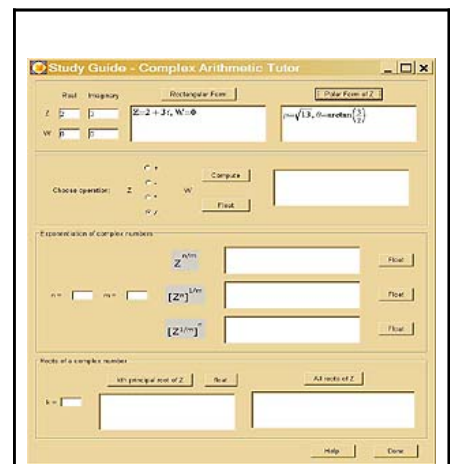
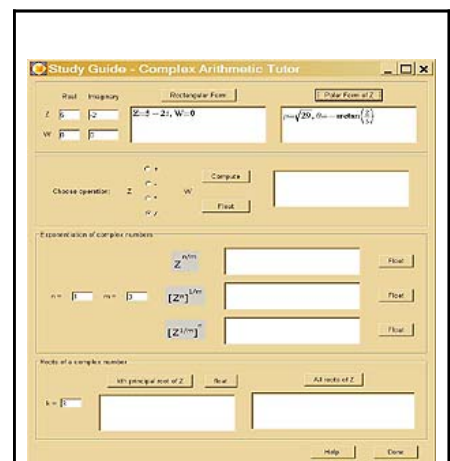


Figura 11.5.3 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa



imaginária de $a + bi$ é o número real b .)

O botão **Forma Polar** resulta $\rho = \sqrt{29}$, com argumento

$$\theta = -\arctan\left(\frac{2}{5}\right).$$

Figura 11.5.4 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

11.5 - Solução Interativa

Reinicialize o Maple apertando o botão à direita.		I...
Insira os Dados		
• Digite $z = 2 + 3 i$ • Menu de Contexto: Associe Nome		
• Digite $w = 5 - 2 i$ • Menu de Contexto: Associe Nome		
Forma Polar de z		
• Digite z e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Módulo (ou Valor Absoluto		
• Digite z e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Argumento		
Forma Polar de w		
• Digite w e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Módulo (ou Valor Absoluto		
• Digite z e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Argumento		
Converta a Forma Polar de z para Forma Retangular		
• Usando ρ e θ computados para z, insira $\rho \operatorname{cis}(\theta)$ • Menu de Contexto: Avalie e Exiba na Linha • Menu de Contexto: Simplifique		
Converta a Forma Polar de w para Forma Retangular		
• Usando ρ e θ computados para w, insira $\rho \operatorname{cis}(\theta)$ • Menu de Contexto: Avalie e Exiba na		

▼ 11.5 - Solução via Comandos do Maple

A *forma polar* do número complexo $z = a + b i$ consiste nos dois números, ρ e θ , onde ρ é a magnitude (ou módulo, ou comprimento, ou valor absoluto) de z , e θ é o seu argumento. O argumento de z é o ângulo do eixo real positivo com a reta radial da origem ao número complexo z . Este encontra-se no domínio $(-\pi, \pi]$.

O Maple pode converter a forma retangular de z em sua forma polar. A representação do Maple da forma polar do número complexo

> $z := 2 + 3 i$

é:

> `convert(z, polar)`

enquanto para o número complexo

> $w := 5 - 2 i$

a forma polar é

> `convert(w, polar)`

Em cada caso, o primeiro número representa a *magnitude* do número complexo, um número que o Maple pode calcular separadamente com

> `abs(z)`

para z , e

> `abs(w)`

para w .

O segundo número na representação polar é o *argumento*, um ângulo que pode ser calculado separadamente no Maple por

> `argument(z)`

para z , e

> argument(w)

para w .

O [diagrama de Argand](#) na figura 11.5.1 ilustra a geometria da magnitude e do argumento de $z = 2 + 3i$, enquanto o diagrama de Argand na figura 11.5.2 ilustra a geometria da magnitude e do argumento de $w = 5 - 2i$.

A forma retangular do número complexo cuja forma polar é dada por ρ e θ é

$$\rho (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Alguns textos utilizam a abreviação

$$\rho \operatorname{cis}(\theta)$$

onde as letras "cis" significam "cosseno i seno". Portanto, a forma retangular de $z = 2 + 3i$ pode ser recobrada a partir de $\rho = \sqrt{13}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$ ao executar-se o comando

> simplify($\sqrt{13} \operatorname{cis}(\arctan(3/2))$)

ou

> simplify($\sqrt{13} (\cos(\arctan(3/2)) + i \sin(\arctan(3/2)))$)

Similarmente, a forma retangular de $w = 5 - 2i$ pode ser recobrada de $\rho = \sqrt{29}$ e $\theta = -\arctan\left(\frac{2}{5}\right)$ ao executar-se

> simplify($\sqrt{29} \operatorname{cis}(-\arctan(2/5))$)

ou

> simplify($\sqrt{29} (\cos(-\arctan(2/5)) + i \sin(-\arctan(2/5)))$)

▼ Problema 11.6

▼ 11.6 - Solução Matemática

A [lei de DeMoivre](#) (também escrito Moivre) mostra como calcular potências [inteiras](#) de z em termos de sua representação polar. Suponha que z possua representação polar dada por ρ e θ . Então z^n , onde n é um inteiro ([positivo](#) ou [negativo](#)), é dado por

$$z^n = \rho^n (\cos(n \theta) + i \sin(n \theta))$$

A forma polar do número complexo $z = 2 + 3i$ consiste em $\rho = \sqrt{13}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$. A fim de elevar-se z a potência 5, deve-se calcular

$$z^5 = (\sqrt{13})^5 \left(\cos\left(5 \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) + i \sin\left(5 \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) \right) = 122 - 597i$$

A simplificação na forma final pode ser feita numericamente com algum mecanismo de cálculo como uma calculadora, por exemplo. Alternativamente, as fórmulas trigonométricas

$$\cos(5x) = 16 \cos(x)^5 - 20 \cos(x)^3 + 5 \cos(x)$$

e

$$\sin(5x) = 16 \sin(x)^5 - 20 \sin(x)^3 + 5 \sin(x)$$

podem ser usadas em conjunto com as identidades

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

e

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

de forma a reduzir z^5 ao valor exato dado acima.

A forma polar do número complexo $w = 5 - 2i$ consiste em $\rho = \sqrt{29}$ e $\theta = -\arctan\left(\frac{2}{5}\right)$. A fim de elevar-se w a potência 7, deve-se calcular

$$w^7 = (\sqrt{29})^7 \left(\cos\left(-7 \arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right) + i \sin\left(-7 \arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right) \right) = -116615 - 60422i$$

A simplificação na forma final pode ser feita numericamente com um mecanismo de cálculo como uma calculadora. Alternativamente, as fórmulas trigonométricas

$$\cos(7x) = 64 \cos(x)^7 - 112 \cos(x)^5 + 56 \cos(x)^3 - 7 \cos(x)$$

e

$$\sin(7x) = -64 \sin(x)^7 + 112 \sin(x)^5 - 56 \sin(x)^3 + 7 \sin(x)$$

podem ser usadas em conjunto com as identidades

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right) = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

e

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

a fim de reduzir w^7 ao valor exato dado acima.

11.6 - Solução via Maplet

O [Tutorial Aritmética Complexa](#) implementa a [lei de DeMoivre](#) no cálculo de z^5 para o [número complexo](#)

$$z = 2 + 3i$$

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.6.1.

Os números complexos z e w são inseridos, introduzindo-se separadamente suas partes [real](#) e [imaginária](#).

(A parte imaginária de $a + bi$ é o número real b .)

Na seção *Exponenciação de números complexos*, deve-se inserir $n = 5$, $m = 1$ e clicar no botão **Ponto flutuante**, no lado oposto ao símbolo $Z^{n/m}$. A forma em [ponto flutuante](#) da solução

$$(2 + 3i)^5 = 122 - 597i$$

é retornada.

O [Tutorial Aritmética Complexa](#) implementa a [lei de DeMoivre](#) no cálculo de w^7 para o [número complexo](#)

$$w = 5 - 2i$$

Porém, este é inserido como se fosse z .

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.6.2.

Os números complexos z e w são inseridos, introduzindo-se separadamente suas partes [real](#) e [imaginária](#).

(A parte imaginária de $a + bi$ é o número real b .)

Na seção *Exponenciação de números complexos*, deve-se inserir $n = 7$, $m = 1$ e clicar no botão **Ponto flutuante**, no lado oposto ao símbolo $Z^{n/m}$.

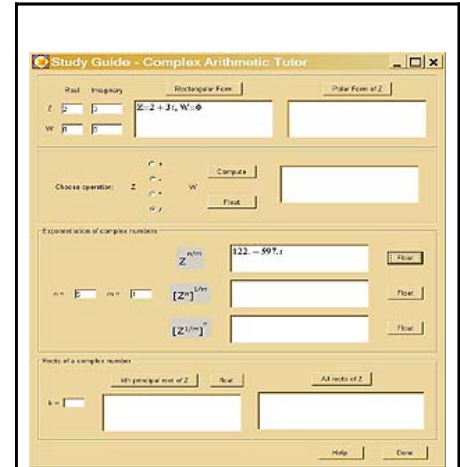


Figura 11.6.1 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

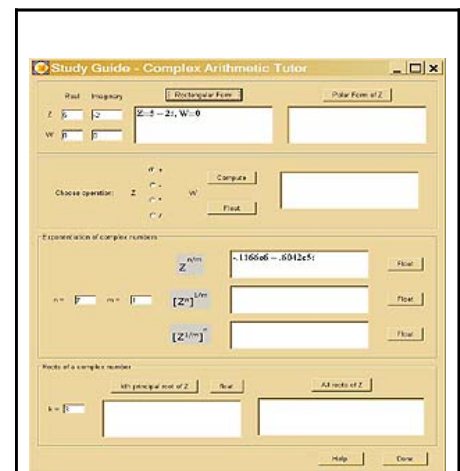


Figura 11.6.2 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

A forma em ponto flutuante da solução, com quatro dígitos significativos, é

$$(5 - 2i)^7 = -(116615 + 60422i) \doteq -0.1166 \times 10^6 - 0.6042 \times 10^5 i$$

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

▼ 11.6 - Solução Interativa

Reinicialize o Maple apertando o botão à direita.		I...
z^5		
• Digite $z = 2 + 3i$ • Menu de Contexto: Associe Nome		
• Digite z e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Argumento • Menu de Contexto: Associe a um Nome: $\>Az$		
• Digite $z ^5 \text{cis}(5Az)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Simplifique $\>$ Normalizar Expandido		
• Digite z^5 • Menu de Contexto: Avalie e Exiba na Linha		
w^7		
• Digite $w = 5 - 2i$ • Menu de Contexto: Associe Nome		
• Digite w e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Argumento • Menu de Contexto: Associe a um Nome: $\>Aw$		
• Digite $w^7 \text{cis}(5Aw)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Simplifique $\>$ Normalizar Expandido		
• Digite w^7 • Menu de Contexto: Avalie e Exiba na Linha		

11.6 - Solução via Comandos do Maple

A lei de DeMoivre (também escrito Moivre) mostra como calcular potências inteiras de z em termos de sua representação polar. Suponha que z possua representação polar dada por ρ e θ . Então z^n , onde n é um inteiro (positivo ou negativo), é dado por

$$z^n = \rho^n (\cos(n \theta) + i \sin(n \theta))$$

z^5	
Insira $z = 2 + 3i$	> $z := 2 + 3i$
Obtenha a forma polar de z	> $\text{convert}(z, \text{polar})$
Obtenha z^5 aplicando a lei de DeMoivre.	> $qz := \text{sqrt}(13)^5 \text{cis}(5 \arctan(3/2))$
Expanda $\rho^5 \text{cis}(5 \theta)$	> $\text{expand}(qz)$
Compare a z^5 computada diretamente no Maple.	> z^5
w^7	
Insira $w = 5 - 2i$	> $w := 5 - 2i$
Obtenha a forma polar de w	> $\text{convert}(w, \text{polar})$
Obtenha w^7 aplicando a lei de DeMoivre.	> $qw := \text{sqrt}(29)^7 \text{cis}(7(-\arctan(2/5)))$
Expanda $\rho^7 \text{cis}(7 \theta)$	> $\text{expand}(qw)$
Compare com w^7 computada diretamente no Maple.	> w^7

Problema 11.7

11.7 - Solução Matemática

Pode-se mostrar que uma consequência da lei de DeMoivre para potências inteiras é a lei para potências fracionárias

$$z^{1/m} = \rho^{1/m} \left(\cos \left(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m} \right) \right), k=0, 1, \dots, m-1$$

Por conveniência, nos referiremos a esta lei como a lei de DeMoivre para potências fracionárias.

O número complexo $z = 2 + 3i$ possui forma polar determinada por $\rho = \sqrt{13}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$. Existem dois valores para $z^{1/2}$. Dados pela lei de DeMoivre para potências fracionárias, estes são

$$z_1 = (\sqrt{13})^{1/2} \left(\cos \left(\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right)}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right)}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{4 + 2\sqrt{13}} + i\sqrt{2\sqrt{13} - 4})$$

$$= 1.732050808 + 1.732050808 i$$

e

$$z_2 = (\sqrt{13})^{1/2} \left(\cos \left(\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right)}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right)}{2} + \pi \right) \right) = -\frac{1}{2} (\sqrt{4 + 2\sqrt{13}} + i\sqrt{2\sqrt{13} - 4})$$

$$= -1.732050808 - 1.732050808 i$$

A parte real de z_1 é obtida usando-se a identidade $\cos\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{13}}$ e a fórmula do ângulo médio $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$ que resulta

$$\sqrt{\sqrt{13}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{13} + 2}}{2} = \sqrt{\frac{2\sqrt{13} + 4}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 2\sqrt{13}}$$

Similarmente, a parte imaginária de z_1 é obtida usando-se a fórmula do ângulo médio

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}, \text{ que resulta}$$

$$\sqrt{\sqrt{13}} \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{13} - 2}}{2} = \sqrt{\frac{2\sqrt{13} - 4}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{13} - 4}$$

O valor em ponto flutuante para z_1 pode ser obtido usando-se algum mecanismo de cálculo, tal

como uma calculadora. Os cálculos para z_2 são realizados seguindo-se a mesma linha, exceto pelas identidades trigonométricas

$$\cos(x + \pi) = \cos(x) \cos(\pi) - \sin(x) \sin(\pi) = -\cos(x)$$

e

$$\sin(x + \pi) = \sin(x) \cos(\pi) + \cos(x) \sin(\pi) = -\sin(x)$$

que devem ser usadas primeiro.

O número complexo $w = 5 - 2i$ possui forma polar determinada por $\rho = \sqrt{29}$ e $\theta = -\arctan\left(\frac{2}{5}\right)$. Existem dois valores para $w^{1/2}$. Dados pela lei de DeMoivre para potências fracionárias, são eles

$$w_1 = (\sqrt{29})^{1/2} \left(\cos\left(-\frac{\arctan\left(\frac{2}{5}\right)}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\arctan\left(\frac{2}{5}\right)}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{2\sqrt{29} + 10} - i\sqrt{2\sqrt{29} - 10})$$

$$=$$

$$2.27872385417085 - 0.438842116902252i$$

e

$$w_2 = (\sqrt{29})^{1/2} \left(\cos\left(-\frac{\arctan\left(\frac{2}{5}\right)}{2} + \pi\right) + i \sin\left(-\frac{\arctan\left(\frac{2}{5}\right)}{2} + \pi\right) \right) = -\frac{1}{2} (\sqrt{2\sqrt{29} + 10} - i\sqrt{2\sqrt{29} - 10})$$

$$=$$

$$-2.27872385417085 + 0.438842116902252i$$

Os cálculos para w_1 e w_2 são realizados seguindo-se a mesma linha usada para z_1 e z_2 , exceto que estes começam com o uso das identidades trigonométricas

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

e

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

▼ 11.7 - Solução via Maplet

O [Tutorial Aritmética Complexa](#) pode ser usado no cálculo de $\sqrt{z}$ para o [número complexo](#)

$$z = 2 + 3i$$



Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.7.1.

Os números complexos são inseridos introduzindo-se separadamente suas partes real e imaginária. (A parte imaginária de $a + b i$ é o número real b .)

Na seção *Exponenciação de números complexos*, deve-se inserir $n = 5$, $m = 1$ e clicar no botão **Ponto flutuante**, no lado oposto ao símbolo $Z^{n/m}$.

A forma em ponto flutuante da solução, com quatro dígitos significativos, é

$$\sqrt{2 + 3 i} = 1.674 + 0.8960 i$$

é retornada.

Alternativamente, fazendo-se $k = 2$ na seção *Raízes de números complexos* e clicando-se no botão **Ponto Flutuante**, à direita do botão **k -ésima raiz principal**, obtém-se o mesmo resultado.

O [Tutorial Aritmética Complexa](#) pode ser usado no cálculo de $\sqrt{w}$ para o número complexo $w = 5 - 2 i$.

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.7.2.

Contudo, este deve ser inserido como se fosse z .

Os números complexos são inseridos introduzindo-se separadamente suas partes real e imaginária. (A parte imaginária de $a + b i$ é o número real b .)

Na seção *Exponenciação de números complexos*, deve-se inserir $n = 1$, $m = 2$ e clicar sobre o botão **Ponto Flutuante** no lado oposto ao símbolo $Z^{n/m}$. A forma em ponto flutuante da solução, com quatro dígitos significativos, é

$$\sqrt{5 - 2 i} = 2.279 - 0.4388 i.$$

Alternativamente, fazendo-se $k = 2$ na seção *Raízes de números complexos* e clicando-se no botão **Ponto Flutuante**, à direita do botão **k -ésima raiz principal**, obtém-se o mesmo resultado.

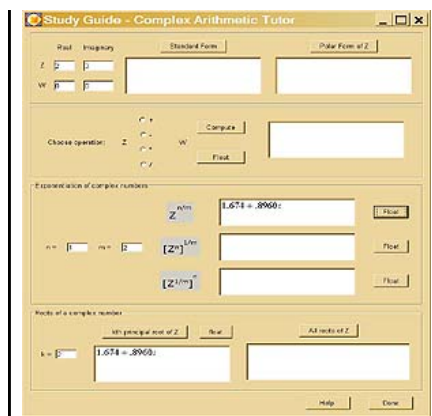


Figura 11.7.1 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

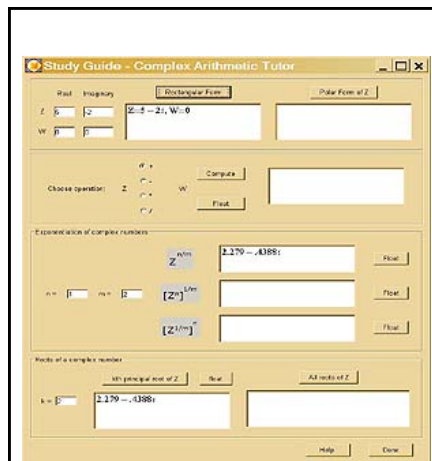


Figura 11.7.2 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

▼ 11.7 - Solução Interativa

Reinicialize o Maple apertando o botão à direita.		I...
$\sqrt{z}$		
• Digite $z = 2 + 3i$ • Menu de Contexto: Associe a um Nome		
• Digite z e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Argumento • Menu de Contexto: Associe a um Nome: $>Az$		
• Digite $\sqrt{ z } \operatorname{cis}(Az/2)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar >10		
• Digite $\sqrt{ z } \operatorname{cis}(Az/2 + \pi)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar >10		
• Digite $\sqrt{ z }$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar >10		
$\sqrt{w}$		
• Digite $w = 5 - 2i$ • Menu de Contexto: Associe Nome		
• Digite w e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Argumento • Menu de Contexto: Associe a um Nome: $>Aw$		
• Digite $\sqrt{ w } \operatorname{cis}(Aw/2)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar >10		
•		

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Digite $\sqrt{ w } \operatorname{cis}(Aw/2 + \pi)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10 | |
| <ul style="list-style-type: none"> • Digite $\sqrt{ w }$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10 | |

11.7 - Solução via Comandos do Maple

Pode-se mostrar que uma consequência da [lei de DeMoivre](#) para potências [inteiras](#) é a lei relacionada a potências fracionárias

$$z^{1/m} = \rho^{1/m} \left(\cos\left(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right) \right), k = 0, 1, \dots, m-1$$

Por conveniência, nos referiremos a esta lei como a lei de DeMoivre para potências fracionárias.

A [raiz quadrada principal](#) de

$$> z := 2 + 3i$$

é dada no Maple como:

$$> zp := \operatorname{evalc}(\operatorname{sqrt}(z))$$

cuja forma em [ponto flutuante](#) é

$$> \operatorname{evalf}(zp)$$

A fim de aplicar-se a lei de DeMoivre para potências fracionárias, deve-se primeiro separar a magnitude e o argumento de z com

$$\begin{aligned} > rz &:= \operatorname{abs}(z); \\ tz &:= \operatorname{argument}(z) \end{aligned}$$

Tem-se, então, as duas raízes quadradas de z

$$\begin{aligned} > z1 &:= \operatorname{sqrt}(rz) \operatorname{cis}(tz/2); \\ z2 &:= \operatorname{sqrt}(rz) \operatorname{cis}(tz/2 + \operatorname{Pi}) \end{aligned}$$

Uma análise cuidadosa mostra que estas duas raízes diferem apenas por um fator -1 , como revela a conversão em ponto flutuante, a seguir:

$$\begin{aligned} > \operatorname{evalf}(z1); \\ &\operatorname{evalf}(z2) \end{aligned}$$

O Maple tenta converter a forma de z_1 na forma de z_p , a raiz quadrada principal. Nos contentaremos com a equivalência das formas em ponto flutuante, ou podemos impor as simplificações

```
> z1a := evalc(simplify(radnormal(convert(z1, exp))))
```

Maple não pode ser coagido a fatorar 13 de cada um dos radicais maiores. Se isso fosse possível a equivalência com z_p pode ser óbvia. Em vez disso, devemos usar

```
> simplify(z1a - zp)
```

Maple dá a raiz quadrada principal de

```
> w := 5 - 2 i
```

como

```
> wp := evalc(sqrt(w))
```

cuja forma em ponto flutuante é

```
> evalf(wp)
```

A fim de aplicar-se a lei de DeMoivre para potências fracionárias, deve-se primeiro separar a magnitude e o argumento de w com

```
> rw := abs(w);  
   tw := argument(w)
```

Tem-se, então, as duas raízes quadradas de w

```
> w1 := sqrt(rw) cis(tw/2);  
   w2 := sqrt(rw) cis(tw/2 + Pi)
```

Uma análise cuidadosa mostra que estas duas raízes diferem apenas por um fator -1 , como revela a conversão em ponto flutuante, a seguir:

```
> evalf(w1);  
   evalf(w2)
```

O Maple tenta converter a forma de z_1 na forma de z_p , a raiz quadrada principal. Nós podemos nos contentar com a equivalência das formas em ponto flutuante, ou podemos impor as simplificações

```
> w1a := evalc(simplify(radnormal(convert(w1, exp))))
```

Maple não pode ser coagido a fatorar 29 de cada um dos radicais maiores. Se isso fosse possível a equivalência com z_p pode ser óbvia. Em vez disso, devemos usar

> *simplify(w1a - wp)*

para completar a demonstração de equivalência exata.

Problema 11.8

11.8 - Solução Matemática

Pode-se mostrar que uma consequência da lei de DeMoivre para potências inteiras é a lei relacionada a potências fracionárias

$$z^{1/m} = \rho^{1/m} \left(\cos \left(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m} \right) \right), k = 0, 1, \dots, m-1$$

Por conveniência, nos referiremos a esta lei como a lei de DeMoivre para potências fracionárias.

O número complexo $z = 2 + 3i$ possui três raízes cúbicas dadas pela lei de DeMoivre para potências fracionárias com $m = 3$. Como a forma polar de z é determinada por $\rho = \sqrt{13}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$, estas três raízes cúbicas são

$$z_1 = (\sqrt{13})^{1/3} \left(\cos \left(\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right)}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right)}{3} \right) \right) = 1.451856618 + 0.4934035341i$$

$$z_2 = (\sqrt{13})^{1/3} \left(\cos \left(\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right) + 2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right) + 2\pi}{3} \right) \right) = -1.153228304 + 1.010642947i$$

$$z_3 = (\sqrt{13})^{1/3} \left(\cos \left(\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right) + 4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\arctan\left(\frac{3}{2}\right) + 4\pi}{3} \right) \right) = -0.2986283143 - 1.504046481i$$

O número complexo $w = 5 - 2i$ possui três raízes cúbicas dadas pela lei de DeMoivre para potências fracionárias com $m = 3$. Como a forma polar de z é determinada por $\rho = \sqrt{29}$ e $\theta = -\arctan\left(\frac{2}{5}\right)$, estas três raízes cúbicas são

$$w_1 = (\sqrt[3]{13})^{1/3} \left(\cos \left(-\frac{\arctan\left(\frac{2}{5}\right)}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\arctan\left(\frac{2}{5}\right)}{3} \right) \right) = 1.738722582 - 0.2217219179 i$$

$$w_2 = (\sqrt[3]{13})^{1/3} \left(\cos \left(\frac{-\arctan\left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\arctan\left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi}{3} \right) \right) = -0.6773444777 + 1.616638885 i$$

$$w_3 = (\sqrt[3]{13})^{1/3} \left(\cos \left(\frac{-\arctan\left(\frac{2}{5}\right) + 4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\arctan\left(\frac{2}{5}\right) + 4\pi}{3} \right) \right) = -1.061378105 - 1.394916967 i$$

As raízes cúbicas principais são z_1 e w_1 , respectivamente. As raízes cúbicas não são expressas em termos de radicais, pois as fórmulas trigonométricas para $\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ e $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ são muito complexas. (Estas envolvem raízes cúbicas de expressões contendo raízes quadradas.) O uso de um mecanismo de cálculo, tal como uma calculadora, é mais aconselhável.

11.8 - Solução via Maplet

O [Tutorial Aritmética Complexa](#) pode ser usado no cálculo de $z^{1/3}$ para o número complexo

$$z = 2 + 3 i$$

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.8.1.

Os números complexos são inseridos introduzindo-se separadamente suas partes real e imaginária. (A parte imaginária de $a + b i$ é o número real b .)

Na seção *Exponenciação de números complexos*, deve-se inserir $n = 1$, $m = 3$ e clicar no botão **Ponto flutuante**, no lado oposto ao símbolo $Z^{n/m}$.

A forma em ponto flutuante da solução

$$(2 + 3 i)^{1/3} = 1.452 + 0.4933 i$$

é retornada. Alternativamente, fazendo-se $k = 3$ na seção *Raízes de números complexos* e clicando-se no botão **Ponto Flutuante**, à direita do botão **k-ésima raiz principal**, obtém-se o mesmo resultado.

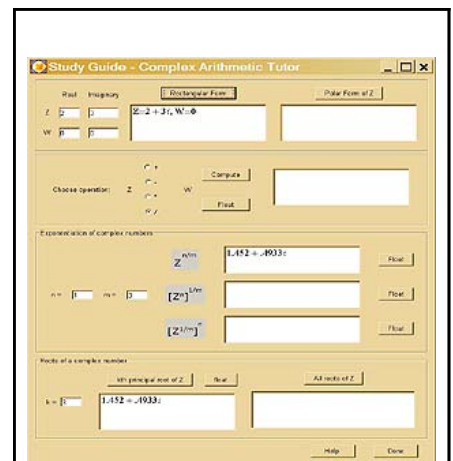


Figura 11.8.1 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

O [Tutorial Aritmética Complexa](#) pode ser usado no cálculo de $w^{1/3}$ para o número complexo

$$w = 5 - 2 i$$

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.8.2.

Contudo, este deve ser inserido como se fosse z .

Os números complexos são inseridos introduzindo-se separadamente suas partes real e imaginária. (A parte imaginária de $a + b i$ é o número real b .)

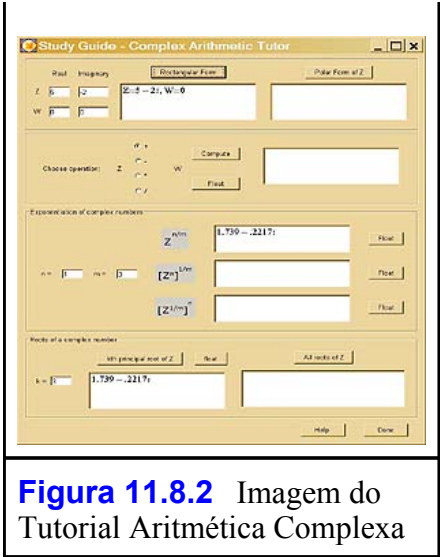


Figura 11.8.2 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

Na seção *Exponenciação de números complexos*, deve-se inserir $n = 1$, $m = 3$ e clicar sobre o botão **Ponto flutuante** no lado oposto ao símbolo $Z^{n/m}$. A forma em ponto flutuante da solução, com quatro dígitos significativos, é

$$(5 - 2 i)^{1/3} = 1.739 - 0.2217 i$$

Alternativamente, fazendo-se $k = 3$ na seção *Raízes de números complexos* e clicando-se no botão **Ponto Flutuante**, à direita do botão *k-ésima raiz principal*, obtém-se o mesmo resultado.

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

11.8 - Solução Interativa

Reinicialize o Maple apertando o botão à direita.		I...
$z^{1/3}$		
• Digite $z = 2 + 3 i$ • Menu de Contexto: Associe a um Nome		
• Digite z e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Argumento • Menu de Contexto: Associe a um Nome: $> Az$		
• Digite $z ^{1/3} \operatorname{cis}(Az/3)$ e pressione a tecla Enter.		

• Menu de Contexto: Aproximar > 10	
• Digite $ z ^{1/3} \operatorname{cis}(Az/3 + 2\pi/3)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10	
• Digite $ z ^{1/3} \operatorname{cis}(Az/3 + 4\pi/3)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10	
• Digite $ z ^{1/3}$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10	
$w^{1/3}$	
• Digite $w = 5 - 2i$ • Menu de Contexto: Associe a um Nome	
• Digite w e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Argumento • Menu de Contexto: Associe a um Nome: > Aw	
• Digite $ w ^{1/3} \operatorname{cis}(Aw/3)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10	
• Digite $ w ^{1/3} \operatorname{cis}(Aw/3 + 2\pi/3)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10	
• Digite $ w ^{1/3} \operatorname{cis}(Aw/3 + 4\pi/3)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10	
• Digite $ w ^{1/3}$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10	

▼ 11.8 - Solução via Comandos do Maple

Pode-se mostrar que uma consequência da [lei de DeMoivre](#) para potências [inteiras](#) é a lei para potências fracionárias

$$z^{1/m} = \rho^{1/m} \left(\cos\left(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right) \right), k = 0, 1, \dots, m-1$$

Por conveniência, nos referiremos a esta lei como a lei de DeMoivre para potências fracionárias.

Maple dá a raiz cúbica principal de

```
> z := 2 + 3 i
```

como

```
> zp := evalc(z1/3)
```

cuja forma em ponto flutuante é

```
> evalf(zp)
```

A fim de aplicar-se a lei de DeMoivre para potências fracionárias, deve-se primeiro separar a magnitude e o argumento de z com

```
> rz := abs(z);  
   tz := argument(z)
```

Portanto, as três raízes cúbicas de z são

```
> z1 := rz1/3 cis(tz/3);  
   z2 := rz1/3 cis(tz/2 + 2 π/3);  
   z3 := rz1/3 cis(tz/3 + 4 π/3)
```

A forma de ponto flutuante destes números:

```
> evalf(z1);  
   evalf(z2);  
   evalf(z3)
```

mostra que a primeira raiz é a principal raiz cúbica.

Maple dá a raiz cúbica principal de

```
> w := 5 - 2 i
```

como

```
> wp := evalc(w1/3)
```

cuja forma em ponto flutuante é

```
> evalf(wp)
```

A fim de aplicar-se a lei de DeMoivre para potências fracionárias, deve-se primeiro separar a

magnitude e o argumento de w com

```
> rw := abs(w);  
tw := argument(w)
```

Portanto, as três raízes cúbicas de w são

```
> w1 := rw1/3 cis(tw/3);  
w2 := rw1/3 cis(tw/3 + 2 π/3);  
w3 := rw1/3 cis(tw/3 + 4 π/3)
```

A forma em ponto flutuante é destes pontos,

```
> evalf(w1);  
evalf(w2);  
evalf(w3)
```

mostra que a primeira raiz é a principal raiz cúbica.

▼ Problema 11.9

▼ 11.9 - Solução Matemática

Se $a = \frac{2}{3}$ e $z = -2 + 3i$, com forma polar determinada por $\rho = \sqrt{13}$ e $\theta = \pi - \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$,
então

$$z^a = |z|^a \operatorname{cis}(a \theta) = |z|^a (\cos(a \theta) + i \sin(a \theta))$$

é estimado como

$$\begin{aligned} & (\sqrt{13})^{2/3} \cos\left(\left(\frac{2}{3}\right) \left(\pi - \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right) + i \sin\left(\left(\frac{2}{3}\right) \left(\pi - \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right) \\ & = 0.3085363542 + 2.331004104 i \end{aligned}$$

Uma vez que $z^2 = -5 - 12i$, com forma polar determinada por $\rho = 13$ e $\theta = \arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi$,
tem-se

$$\begin{aligned} [z^2]^{1/3} &= 13^{1/3} \left(\cos\left(\frac{\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi}{3}\right) \right) = \\ & 1.864440593 - 1.432702373 i \end{aligned}$$

Por outro lado, $z^{1/3}$ possui forma polar determinada por $\rho = (\sqrt{13})^{1/3} = 13^{1/6}$ e

$\theta = \left(\frac{1}{3} \right) \left(\pi - \arctan\left(\frac{3}{2} \right) \right)$, de maneira que

$$[z^{1/3}]^2 = (13^{1/6})^2 \cos\left(\left(\frac{2}{3}\right) \left(\pi - \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right) + i \sin\left(\left(\frac{2}{3}\right) \left(\pi - \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right) = 0.3085363556 + 2.331004104 i$$

Calculando-se a raiz antes da potência, obtém-se o mesmo número como valor principal de z^a , onde a é um número racional.

11.9 - Solução via Maplet

Para $z = -2 + 3i$, os três números complexos

$$z^{2/3} = 0.3084 + 2.331 i$$

$$[z^2]^{1/3} = 1.864 - 1.432 i$$

$$[z^{1/3}]^2 = 0.3084 + 2.331 i$$

são calculados com o [Tutorial Aritmética Complexa](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.9.1.

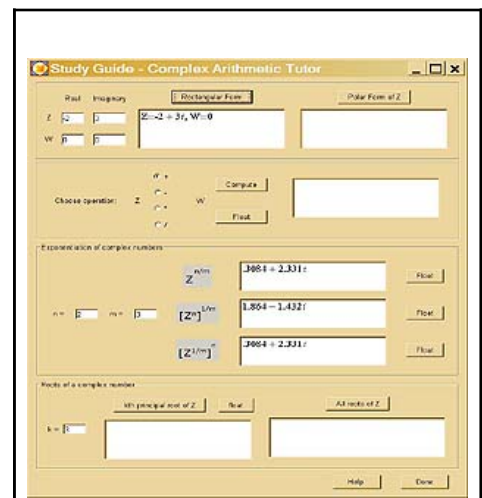


Figura 11.9.1 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

Evidência experimental mostra que a forma correta de elevar-se um número complexo a um expoente racional consiste em calcular a raiz antes da potência.

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

11.9 - Solução Interativa

Reinicialize o Maple apertando o botão à direita.		I...
• Digite $z = -2 + 3i$ • Menu de Contexto: Associe a um Nome		

Valor do Maple para $z^{2/3}$	
• Digite $z^{2/3}$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Conversões > $a + b I$ • Menu de Contexto: Aproximar > 10	
Por definição, calcular $z^{2/3} = z ^{2/3} \operatorname{cis}\left(\frac{2}{3} \operatorname{Arg}(z)\right)$	
• Digite z e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Argumento • Menu de Contexto: Associe a um Nome > Az	
• Digite $z ^{2/3} \operatorname{cis}\left(\frac{2}{3} Az\right)$ e pressione a tecla Enter • Menu de Contexto: Aproximar > 10	
Calcule $(z^2)^{1/3}$	
• Digite z^2 e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Associe a um Nome > $Z2$	
• Digite $Z2^{1/3}$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10	
Calcule $(z^{1/3})^2$	
• Digite $z^{1/3}$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Conversões > $a + b I$ • Menu de Contexto: Associe a um Nome > $Z3$	
• Digite $Z3^2$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Conversões > $a + b I$ • Menu de Contexto: Aproximar > 10	

▼ 11.9 - Solução via Comandos do Maple

Seja z o número complexo

> $z := -2 + 3 i$

cuja forma polar é

> *convert*(z, polar)

Portanto, a magnitude e o argumento são, respectivamente,

> *rz* := *abs*(z);
tz := *argument*(z)

Usando-se a definição $z^a = |z|^a \operatorname{cis}(a \theta)$, o valor de $z^{2/3}$ é

> *za* := *simplify*(*rz*^{2/3} (*cis*(2 *tz* / 3))) :
za = *evalf*(*za*)

que se encontra em acordo com o cálculo do Maple para este número, como se pode notar em

> *zaM* := *simplify*(*evalc*(*z*^{2/3})) :
zaM = *evalf*(*zaM*)

Calculamos agora $[z^2]^{1/3}$, como segue:

> *N* := *abs*(*z*²)^{1/3} *cis*(*argument*(*z*²) / 3) :
N = *evalf*(*N*)

Surpreendentemente, elevando-se primeiro ao quadrado e tomando-se a raiz cúbica em seguida, o resultado dado pela definição não é obtido.

Alternativamente, calculamos $[z^{1/3}]^2$ como segue:

> *M* := (*abs*(*z*)^{1/3} *cis*(*argument*(*z*) / 3))² :
simplify(*M*) = *evalf*(*M*)

Tomando-se primeiro a raiz cúbica e elevando-se ao quadrado em seguida, obtém-se o mesmo resultado dado pela definição.

▼ Problema 11.10

▼ 11.10 - Solução Matemática

Se $a = \frac{3}{2}$ e $z = -2 - 3i$, com forma polar determinada por $\rho = \sqrt{13}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) - \pi$, então

$$z^a = |z|^a \operatorname{cis}(a \theta) = |z|^a (\cos(a \theta) + i \sin(a \theta))$$

é estimado como

$$(\sqrt{13})^{3/2} \cos\left(\left(\frac{3}{2}\right) \left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right) - \pi\right) + i \sin\left(\left(\frac{3}{2}\right) \left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right) - \pi\right)\right)\right) = -6.814402636 + 0.6603660268 i$$

Como $z^3 = 46 - 9 i$, com forma polar determinada por $\rho = 13 \sqrt{13}$ e $\theta = -\arctan\left(\frac{9}{46}\right)$, tem-se

$$[z^3]^{1/2} = (13 \sqrt{13})^{1/2} \left(\cos\left(-\frac{\arctan\left(\frac{9}{46}\right)}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\arctan\left(\frac{9}{46}\right)}{2}\right) \right) = 6.814402636 - 0.6603660276 i$$

Por outro lado, $z^{1/2}$ possui forma polar determinada por $\rho = (\sqrt{13})^{1/2} = 13^{1/4}$ e

$$\theta = -\arctan\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{13}+4}}{\sqrt{2\sqrt{13}-4}}\right) = -\arctan\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right), \text{ de maneira que}$$

$$[z^{1/2}]^3 = (13^{1/4})^3 \cos\left(-3 \arctan\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)\right) + i \sin\left(-3 \arctan\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)\right) = -6.814402636 + 0.6603660286 i$$

Calculando-se a raiz quadrada antes da potência, obtém-se o mesmo número dado pelo valor principal de z^a , onde a é um número racional.

11.10 - Solução via Maplet

Para $z = -2 - 3 i$, os três números complexos

$$z^{3/2} = -6.814 + 0.6604 i$$

$$(z^3)^{1/2} = 6.814 - 0.6604 i$$

$$(z^{1/2})^3 = -6.814 + 0.6604 i$$

são calculados com o [Tutorial Aritmética Complexa](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.10.1.

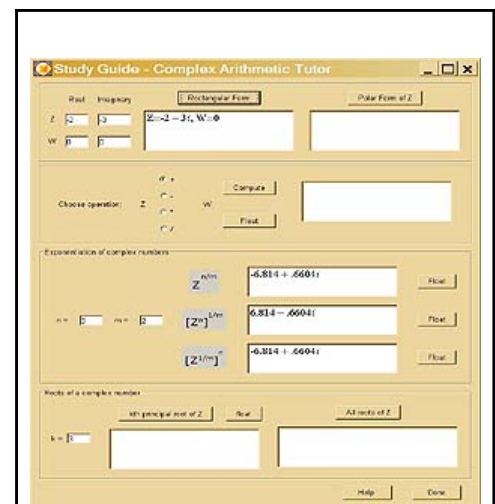


Figura 11.10.1 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

Evidência experimental mostra que a forma correta de elevar-se um número complexo a um expoente racional consiste em calcular a raiz antes da potência.

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

▼ 11.10 - Solução Interativa

Reinicialize o Maple apertando o botão à direita.		I...
• Digite $z = -2 - 3 i$ • Menu de Contexto: Associe a um Nome		
Valor do Maple para $z^{3/2}$		
• Digite $z^{3/2}$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Conversões $> a + b I$ • Menu de Contexto: Aproximar > 10		
Por definição, calcular $z^{3/2} = z ^{3/2} \operatorname{cis}\left(\frac{3}{2} \operatorname{Arg}(z)\right)$		
• Digite z e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Argumento • Menu de Contexto: Associe a um Nome $> Az$		
• Digite $z ^{3/2} \operatorname{cis}\left(\frac{3}{2} Az\right)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10		
Calcular $(z^3)^{1/2}$		
• Digite z^3 e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Argumento • Menu de Contexto: Associe a um Nome $> Z3$		
• Digite $Z3^{1/2}$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Aproximar > 10		
Calcular $(z^{1/2})^3$		
• Digite $z^{1/2}$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Conversões $> a + b I$ • Menu de Contexto: Associe a um		

Nome > Z2	
• Digite Z2³ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Conversões > $a + b I$ • Menu de Contexto: Aproximar > 10	

11.10 - Solução via Comandos do Maple

Seja z o número complexo

```
> z := -2 - 3 i
```

cuja forma polar é

```
> convert(z, polar)
```

Portanto, a magnitude e o argumento são, respectivamente,

```
> rz := abs(z);
   tz := argument(z)
```

Usando-se a definição $z^a = |z|^a \operatorname{cis}(a \theta)$, o valor de $z^{3/2}$ é

```
> za := simplify(rz3/2 (cis(3 tz / 2))) :
   za = evalf(za)
```

que se encontra em acordo com o cálculo do Maple para este número, como se pode notar em

```
> zaM := simplify(evalc(z3/2)) :
   zaM = evalf(zaM)
```

Lamentavelmente, o Maple usa algoritmos diferentes para estes dois cálculos, tornando-se difícil para o Maple converter a forma trigonométrica do número em radicais. Podemos nos contentar com a equivalência das formas em ponto flutuante ou podemos impor as seguintes simplificações.

```
> za_exp := radnormal(evalc(simplify(convert(za, exp))))
```

Maple não pode ser coagido a fatorar 13 de cada um dos radicais maiores. Se isso fosse possível a exata equivalência pode ser óbvia. Em vez disso, devemos usar

```
> simplify(za_exp - zaM)
```

Calculamos agora $(z^3)^{1/2}$, como segue:

> $N := \text{abs}(z^3)^{1/2} \text{cis}(\text{argument}(z^3)/2) :$
 $N = \text{evalf}(N)$

Surpreendentemente, elevar primeiro a quadrado e tomar a raiz cúbica em seguida não resulta na mesma resposta dada pela definição.

Alternativamente, calculamos $(z^{1/2})^3$ como segue:

> $M := (\text{abs}(z)^{1/2} \text{cis}(\text{argument}(z)/2))^3 :$
 $\text{simplify}(M) = \text{evalf}(M)$

Tomando a raiz cúbica principal primeiro depois quadrando dá o mesmo resultado que a definição.

Problema 11.11

11.11 - Solução Matemática

11.11 (a) - Solução Matemática

Sem o uso de ferramentas gráficas de qualquer tipo, o gráfico de $f(x) = (x + 1)^{2/3}$ poderia ser obtido a partir de uma tabela de valores como aquela na Tabela 11.11.1. Então usando uma folha de papel e a simetria par exibida por esta função, pode-se obter um gráfico como o da Figura 11.11.1.

$[x, f(x)]$,	$[x, f(x)]$,	$[x, f(x)]$,
$[0., 1.]$,	$[1.4,$	$[2.8,$
$[0.2,$	$2.061552856]$,	$4.27531557\backslash$
1.026491978	$[1.6,$	$2]$,
$]$,	$2.331488792]$,	$[3.0,$
$[0.4,$	$[1.8,$	$4.64158883\backslash$
1.104007421	$2.619653821]$,	$4]$,
$]$,	$[2.0,$	$[3.2,$
$[0.6,$	$2.924017738]$,	$5.01777142\backslash$
1.227512544	$[2.2,$	$7]$,
$]$,	$3.242962286]$,	$[3.4,$
$[0.8,$	$[2.4,$	$5.40330844\backslash$
1.390686478	$3.575179054]$,	$4]$,
$]$,	$[2.6,$	$[3.6,$
$[1.0,$	$3.919594571]]$	$5.79771610\backslash$
1.587401052		$4]$,
$]$,		$[3.8,$
$[1.2,$		$6.20056880\backslash$
1.812424333		$0]$,
$]]$		$[4.0,$
		$6.61148901\backslash$
		$8]]$

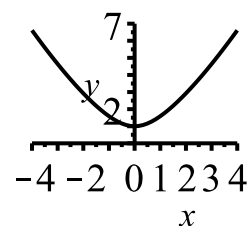


Figura 11.11.1
 Gráfico de
 $f(x) = (x^2 + 1)^{2/3}$

Tabela 11.11.1 Valores de $f(x) = (x^2 + 1)^{2/3}$

11.11 (b) - Solução Matemática

Sem o uso de ferramentas gráficas de qualquer tipo, o gráfico de

$g(x) = (x^2 - 1)^{3/2}$ poderia ser obtido a partir de uma tabela de valores como aquela na Tabela 11.11.2. Note que para $|x^2| < 1$, $g(x)$ é de valor complexo. Em particular, o valor de $g(x)$ em $x = 0$ é $g(0) = -i$. Este é obtido se a raiz quadrada for tomada antes de aplicar-se a potência. A raiz quadrada de -1 é i e $i^3 = -i$.

Então usando uma folha de papel e a simetria par exibida por esta função, pode-se obter um gráfico como o da Figura 11.11.2.

x	$g(x)$
1.0	0.
1.2	0.2918629816
1.4	0.9406040612
1.6	1.948439377
1.8	3.352525020
2.0	5.196152427

Tabela 11.11.2 Valores de $g(x) = (x^2 - 1)^{3/2}$

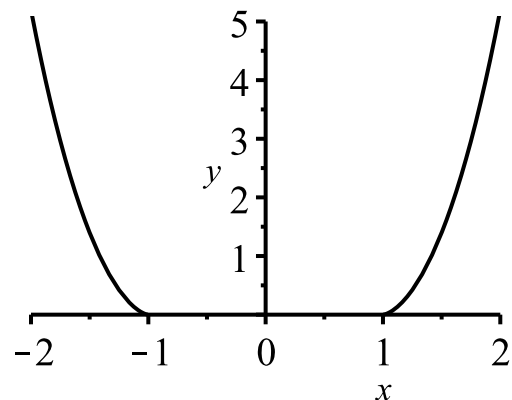


Figura 11.11.2 Gráfico de $g(x) = (x^2 - 1)^{3/2}$

11.11 - Solução via Maplet

11.11 (a) - Solução via Maplet

A função $f(x) = (x^2 + 1)^{2/3}$ pode ser traçada no Maple sob uma variedade de formas "apontar-e-clicar". Uma forma é clicar com o botão direito em

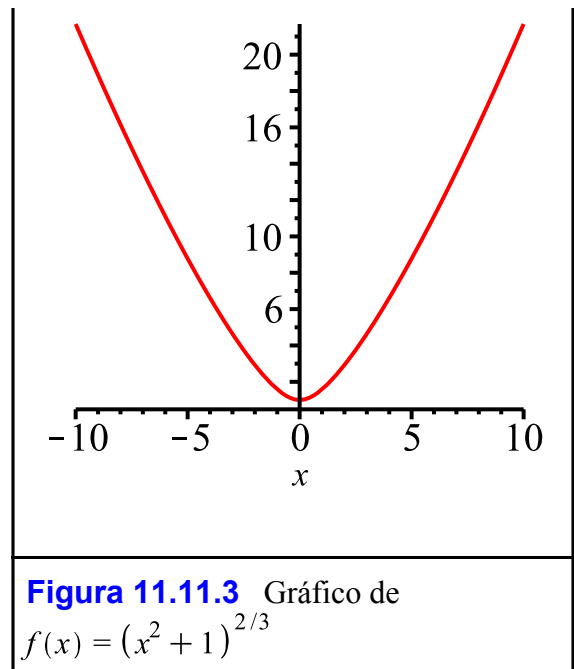
$$(x^2 + 1)^{2/3}$$

No *Menu de Contexto* que aparece, seleciona-se **Gráficos e Gráficos 2-D**. O Maple gera automaticamente um gráfico similar ao que aparece na Figura 11.11.3.

Alternativamente, seleciona-se no menu de contexto **Gráficos e Construtor de Gráficos**. Na janela **Construtor de Gráficos** que se abre, seleciona-se *Gráficos* para Tipo de Gráficos e, para Selecionar Gráficos escolhe-se *gráficos 2-D*. Tomando-se os valores-padrão, basta clicar sobre o botão **Gráficos** ou, ainda, pode-se selecionar o botão **Opções** e escolher o gráfico desejado.

O **Construtor de Gráficos** também pode ser acessado a partir do menu *Ferramentas/Assistentes* no topo da interface da folha de trabalho.

Na janela que se abre, clica-se em **Adicionar**, inserindo-se então a expressão a ser traçada. Em seguida, clica-se em **Aceitar** e **Concluir**. O resultado é o mesmo descrito quando o **Construtor de Gráficos** foi iniciado a partir do Menu de Contexto.



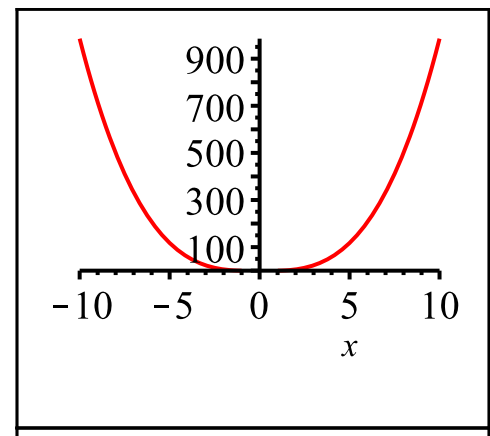
11.11 (b) - Solução via Maplet

A função $g(x) = (x^2 - 1)^{3/2}$ similar a aquela mostrada na Figura 11.11.4 pode ser traçada no Maple sob uma variedade de formas "apontar-e-clicar". Uma forma é clicar com o botão direito em

$$(x^2 - 1)^{3/2}$$

No *Menu de Contexto* que aparece, seleciona-se **Gráficos** e **Gráficos 2-D**. O Maple gera automaticamente um gráfico similar ao que aparece na Figura 11.11.4.

Alternativamente, seleciona-se no menu de contexto **Gráficos e Construtor de Gráficos**. Na janela **Construtor de Gráficos** que se abre, seleciona-se *Gráficos* para Tipo de Gráficos e, para Selecionar Gráficos escolhe-se *gráficos 2-D*. Tomando-se os valores-padrão, basta clicar sobre o botão **Gráficos** ou, ainda, pode-se selecionar o



botão **Opções** e escolher o gráfico desejado

O **Construtor de Gráficos** também pode ser acessado a partir do menu *Ferramentas/Assistentes* no topo da interface da folha de trabalho.

Na janela que se abre, clica-se em **Adicionar**, inserindo-se então a expressão a ser traçada. Em seguida, clica-se em **Aceitar** e **Concluir**. O resultado é o mesmo descrito quando o **Construtor de Gráficos** foi iniciado a partir do Menu de Contexto.

Figura 11.11.4 Gráfico de $g(x) = (x^2 - 1)^{3/2}$

Para obter-se o valor de $g(0) = (-1)^{3/2}$, o [Tutorial Aritmética Complexa](#) pode ser usado.

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.11.5.

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

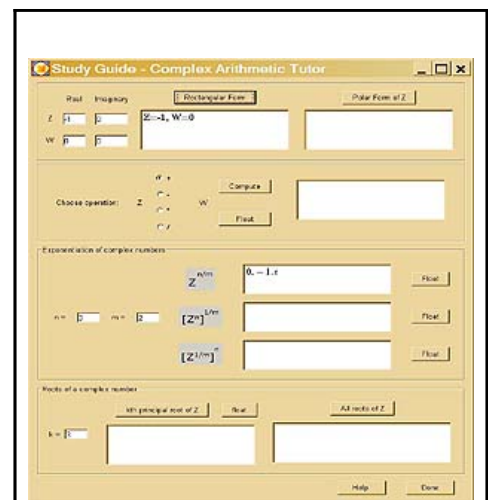


Figura 11.11.5 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

▼ 11.11 - Solução Interativa

▼ 11.11 (a) - Solução Interativa

- Digite $(z^2 + 1)^{2/3}$
- Menu de Contexto:
Gráficos > Construtor de Gráficos
 $-4 \leq x \leq 4$
Opções:
 $0 \leq y \leq 7$

▼ 11.11 (b) - Solução Interativa

Reinicialize o Maple apertando o botão à direita.

I...

- Digite $g(0) = (x^2 - 1)^{3/2}$
- Menu de Contexto: Associe Função

- Digite $g(x)$ e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Gráficos > Construtor de Gráficos
 $-2 \leq x \leq 2$
Opções:
 $0 \leq y \leq 5$

- Digite $g(0)$
- Menu de Contexto: Avalie e Exiba na Linha

▼ 11.11 - Solução via Comandos do Maple

▼ 11.11 (a) - Solução via Comandos do Maple

O gráfico da função

$$> f := (x^2 + 1)^{2/3}$$

é dado na Figura 11.11.6.

> `plot(f, x = -3 .. 3, y = 0 .. 5)`

Figura 11.11.6 Gráfico de
 $f(x) = (x^2 + 1)^{2/3}$

Como a expressão $x^2 + 1$ é sempre positiva, o cálculo da raiz cúbica não apresenta nenhum problema em particular. O Maple calcula a raiz cúbica real, eleva-a então ao quadrado e, por fim, traça o gráfico.

▼ 11.11 (b) - Solução via Comandos do Maple

O gráfico da função

$$> g := (x^2 - 1)^{3/2}$$

é mostrado na Figura 11.11.7.

-

> plot(g, x=-3..3)

Figura 11.11.7 Gráfico de $g(x) = (x^2 - 1)^{3/2}$

Para x no intervalo aberto $(-1, 1)$, a expressão $x^2 - 1$ é negativa. O cubo deste número negativo é negativo e sua raiz quadrada é, então, imaginária. Portanto, o gráfico possui uma descontinuidade entre $x = -1$ e $x = 1$.

Em particular, o valor da função $g(0)$ é o número imaginário $-i$, como se pode constatar por

> eval(g, x=0)

Para números positivos, o cálculo de uma potência racional tal como $\frac{3}{2}$ não apresenta nenhum problema em particular. Contudo, para números negativos, parecem existir duas formas diferentes de se proceder. A raiz pode ser calculada primeiro e depois a potência ou, pode-se calcular primeiro a potência e depois tomar a raiz. Cada um destes cálculos gera resultados diferentes, mas apenas o primeiro está correto.

Quando $x = 0$, a função $g(x)$ requer o cálculo do número complexo $(-1)^{3/2}$.

Se a raiz for tomada primeiro, o cálculo resulta em i^3 , que é igual a $-i$.

Se a potência for tomada primeiro, o cálculo requer que -1 seja elevado ao cubo primeiro, resultando em -1 . Tomando-se, em seguida, a raiz quadrada, obtém-se $\sqrt{-1} = i$.

O primeiro cálculo, cujo resultado é consistente com a resposta do Maple, é o correto. O estudante que tiver em mente a sentença

Raízes Antes de Potências

sempre obterá a resposta correta nestes cálculos. Além disso, o estudante que recordar que é preciso estar firmemente *enraizado* antes de se exercer *potência* sobre algo, também lembrará mais facilmente a sentença que diz que "raízes devem ser tomadas antes de potências".

▼ Problema 11.12

▼ 11.12 - Solução Matemática

▼ 11.12 (a) - Solução Matemática

O cálculo

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^{1/2})^2 = i^2 = -1$$

está correto, pois a raiz foi tomada antes que a potência fosse aplicada.

11.12 (b) - Solução Matemática

O cálculo

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{1/2} = \sqrt{1} = 1$$

não está correto, pois a potência foi aplicada antes de se tomar a raiz. Sendo assim, a proposição acima é reescrita como

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} \neq ((-1)^2)^{1/2} = \sqrt{1} = 1$$

11.12 - Solução via Maplet

11.12 (a) - Solução via Maplet

O [Tutorial Aritmética Complexa](#) pode ser usado para verificar-se que o cálculo

$$(-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^{1/2})^2 = i^2 = -1$$

está correto, uma vez que a raiz foi tomada antes que a potência fosse aplicada.

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.12.1.

Na seção *Exponenciação de números complexos*, o resultado que se encontra próximo do símbolo $Z^{n/m}$ é obtido pela definição dada no problema 11.9. Este encontra-se em acordo com o resultado referente ao símbolo $[Z^{1/m}]^n$ e, portanto, novamente consistente com a regra "raízes antes de potências".

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

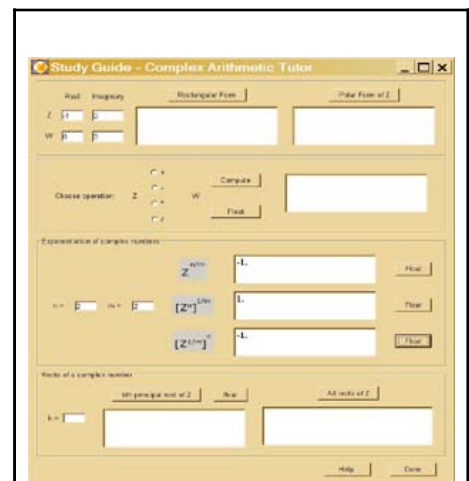


Figura 11.12.1 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

11.12 (b) - Solução via Maplet

O [Tutorial Aritmética Complexa](#) pode ser usado para verificar-se que o cálculo

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{1/2} = \sqrt{1} = 1$$

não está correto, pois a potência foi aplicada antes de tomar-se a raiz. Portanto, a proposição acima é reescrita como

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} \neq ((-1)^2)^{1/2} = \sqrt{1} = 1$$

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 11.12.2.

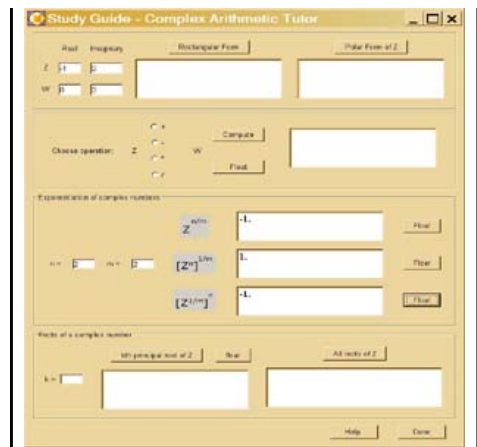


Figura 11.12.1 Imagem do Tutorial Aritmética Complexa

Na seção *Exponenciação de números complexos*, o resultado que se encontra próximo ao símbolo $Z^{n/m}$ é obtido pela definição dada no problema 11.9. Este não se encontra em acordo com o resultado referente ao símbolo $[Z^n]^{1/m}$, novamente demonstrando que a violação da regra "raízes antes de potências" leva a resultados incorretos.

Para iniciar o **Tutorial Aritmética Complexa**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Aritmética Complexa](#).

▼ 11.12 - Solução Interativa

▼ 11.12 (a) - Solução Interativa

O cálculo

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^{1/2})^2 = i^2 = -1$$

está correto, pois a raiz foi tomada antes que a potência fosse aplicada.

▼ 11.12 (b) - Solução Interativa

O cálculo

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{1/2} = \sqrt{1} = 1$$

não está correto, pois a potência foi aplicada antes de se tomar a raiz. Sendo assim, a proposição acima é reescrita como

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} \neq ((-1)^2)^{1/2} = \sqrt{1} = 1$$

11.12 - Solução via Comandos do Maple

11.12 (a) - Solução via Comandos do Maple

O cálculo

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^{1/2})^2 = i^2 = -1$$

está correto, pois a raiz foi tomada antes que a potência fosse aplicada.

11.12 (b) - Solução via Comandos do Maple

O cálculo

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{1/2} = \sqrt{1} = 1$$

não está correto, pois a potência foi aplicada antes de se tomar a raiz. Sendo assim, a proposição acima é reescrita como

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} \neq ((-1)^2)^{1/2} = \sqrt{1} = 1$$

Exercícios - Capítulo 11

Para os dois números complexos z e w dados nos exercícios 11.1 - 11.4, obter

- (a) $z + w$
- (b) $z - w$
- (c) $z w$
- (d) $\frac{z}{w}$

11.1. $z = 7 - 5i$, $w = -3 - 9i$

11.2. $z = 4 + i$, $w = -6 - 3i$

11.3. $z = 8 + 7i$, $w = -7 - 8i$

11.4. $z = -1 + 4i$, $w = -1 - 3i$

Nos exercícios 11.5 - 11.8, obter a forma polar (isto é, encontrar $\rho = |z|$ e θ , o argumento de z) para os números complexos indicados. Em cada caso, mostrar que $\rho \operatorname{cis}(\theta)$ recobra a forma retangular de z .

11.5. $z = 1 + i$

11.6. $z = -1 + i$

11.7. $z = -1 - i$

11.8. $z = 1 - i$

Nos exercícios 11.9 - 11.12, usar a lei de DeMoivre para potências a fim de obter-se z^n para z e n dados.

11.9. $z = 3 + 5i, n = 3$

11.10. $z = -3 + 5i, n = -2$

11.11. $z = -3 - 5i, n = 5$

11.12. $z = 3 - 5i, n = -4$

Nos exercícios 11.13 - 11.16, obter ambas as raízes quadradas do número complexo dado. Em cada caso, indicar qual é a raiz quadrada principal.

11.13. $z = 1 + i\sqrt{3}$

11.14. $z = 2 - i\sqrt{3}$

8.15. $z = \sqrt{3} - 2i$

11.16. $z = \sqrt{3} - i$

Nos exercícios 11.17 - 11.20, obter as três raízes cúbicas do número complexo dado. Em cada caso, indicar a raiz cúbica principal.

11.17. $z = 1 - i\sqrt{3}$

11.18. $z = 2 + i\sqrt{3}$

11.19. $z = \sqrt{3} + 2i$

11.20. $z = \sqrt{3} + i$

Nos exercícios 11.21 - 11.22, uma função $f(x) = u(x)^{m/n}$ e um valor para x são dados.

(a) Obter um gráfico de $f(x)$.

(b) Para o valor de x dado, calcular $[u(x)^{1/n}]^m$ e $[u(x)^m]^{1/n}$. Em seguida, indicar qual destes dois valores está correto.

11.21. $f(x) = (x^4 + 1)^{2/3}, x = 0$

11.22. $(f(x) = x^2 - 1)^{3/2}, x = 0$



SOLUÇÕES INTELIGENTES PARA FAZER MATEMÁTICA

www.aprendanet.com.br - vendas@aprendanet.com.br

Tel.: 24-2231-3549 - Fax.: 24-2237-0625